

Méthodes de réduction de modèle pour la simulation des écoulements et de la qualité de l'air

Cyrille Allery, Antoine Dumon, Cédric Leblond,
Alexandra Tallet et al.

LEPTIAB, Université de La Rochelle

- Simulation de la qualité de l'air à l'intérieur des ambiances habitables
 - ▶ Grands volumes et grands intervalles de temps
 - ▶ Temps de simulation et besoin en stockage importants
 - ▶ Contrôle en temps réel
- Nécessité de diminuer ces coûts de simulations et de place mémoire
- Utilisation de techniques de réduction de modèles (ROM)

$$w(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^N \phi^i(\mathbf{x}) b^i(t) \quad \text{avec } N \text{ petit}$$

- ▶ Construction de la base $\{\phi^i\}_{i=1}^N$
 - Méthodes a postérieur : POD, CVT, Balanced Truncation ...
 - Méthodes a priori : APR, PGD (Proper Generalized Decomposition)
- ▶ Projection de Galerkin sur chaque fonction $\phi^i(\mathbf{x})$

=> obtention du modèle réduit

- Simulation de la qualité de l'air à l'intérieur des ambiances habitables
 - ▶ Grands volumes et grands intervalles de temps
 - ▶ Temps de simulation et besoin en stockage importants
 - ▶ Contrôle en temps réel
- Nécessité de diminuer ces coûts de simulations et de place mémoire
- Utilisation de techniques de réduction de modèles (ROM)

$$w(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^N \phi^i(\mathbf{x}) b^i(t) \quad \text{avec } N \text{ petit}$$

- ▶ Construction de la base $\{\phi^i\}_{i=1}^N$
 - Méthodes a postériori : POD, CVT, Balanced Truncation ...
 - Méthodes a priori : APR, PGD (Proper Generalized Decomposition)
- ▶ Projection de Galerkin sur chaque fonction $\phi^i(\mathbf{x})$

=> obtention du modèle réduit (ROM) de taille N

- Simulation de la qualité de l'air à l'intérieur des ambiances habitables
 - ▶ Grands volumes et grands intervalles de temps
 - ▶ Temps de simulation et besoin en stockage importants
 - ▶ Contrôle en temps réel
- Nécessité de diminuer ces coûts de simulations et de place mémoire
- Utilisation de techniques de réduction de modèles (ROM)

$$w(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^N \phi^i(\mathbf{x}) b^i(t) \quad \text{avec } N \text{ petit}$$

- ▶ Construction de la base $\{\phi^i\}_{i=1}^N$
 - Méthodes a postériori : POD, CVT, Balanced Truncation ...
 - Méthodes a priori : APR, PGD (Proper Generalized Decomposition)
- ▶ Projection de Galerkin sur chaque fonction $\phi^i(\mathbf{x})$

=> obtention du modèle réduit (ROM) de taille N

- Simulation de la qualité de l'air à l'intérieur des ambiances habitables
 - ▶ Grands volumes et grands intervalles de temps
 - ▶ Temps de simulation et besoin en stockage importants
 - ▶ Contrôle en temps réel
- Nécessité de diminuer ces coûts de simulations et de place mémoire
- Utilisation de techniques de réduction de modèles (ROM)

$$w(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^N \phi^i(\mathbf{x}) b^i(t) \quad \text{avec } N \text{ petit}$$

- ▶ Construction de la base $\{\phi^i\}_{i=1}^N$
 - Méthodes a postériori : POD, CVT, Balanced Truncation ...
 - Méthodes a priori : APR, PGD (Proper Generalized Decomposition)
- ▶ Projection de Galerkin sur chaque fonction $\phi^i(\mathbf{x})$

=> obtention du modèle réduit (ROM) de taille N

- Simulation de la qualité de l'air à l'intérieur des ambiances habitables
 - ▶ Grands volumes et grands intervalles de temps
 - ▶ Temps de simulation et besoin en stockage importants
 - ▶ Contrôle en temps réel
- Nécessité de diminuer ces coûts de simulations et de place mémoire
- Utilisation de techniques de réduction de modèles (ROM)

$$w(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^N \phi^i(\mathbf{x}) b^i(t) \quad \text{avec } N \text{ petit}$$

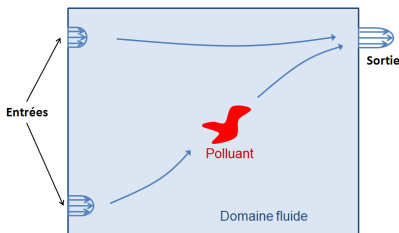
- ▶ Construction de la base $\{\phi^i\}_{i=1}^N$
 - Méthodes a posteriori : POD, CVT, Balanced Truncation ...
 - Méthodes a priori : APR, PGD (Proper Generalized Decomposition)
- ▶ Projection de Galerkin sur chaque fonction $\phi^i(\mathbf{x})$

=> obtention du modèle réduit (ROM) de taille N

- A) Contrôle optimal et réduction par projection de Galerkin
- B) Amélioration du modèle d'ordre réduit par projection optimale
- C) Construction d'une base de façon itérative par PGD (Proper Generalized Decomposition)

Description du problème

- Approche classique en mécanique des fluides
(Bergmann et Cordier, *Journal of Comp. Physics*, 2005.)
- Application au contrôle d'un polluant (ou de la température)
 - ▶ Données du problème : géométrie, position initiale du polluant
 - ▶ But : agir sur l'écoulement pour contrôler la dispersion du polluant



- Vitesses aux entrées/sortie prises sous la forme
 - $\mathbf{u}|_{\Gamma_n} = \alpha_n \gamma(t) \mathbf{c}(\mathbf{x})$
 - $\mathbf{u}|_{\Gamma_s} = (\alpha_1 + \alpha_2) \gamma(t) \mathbf{c}(\mathbf{x})$
- paramètre de contrôle $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}^T$

Problème de contrôle optimal associé

- Fonctionnelle à minimiser

$$J(C, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (C - \hat{C})^2 \, d\mathbf{x} \, dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (C|_T - \hat{C}|_T)^2 \, d\mathbf{x} + \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^{N_e} \alpha_n^2$$

- ▶ sous la contrainte de la dynamique du polluant

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \frac{1}{Re.Sc} \nabla^2 C \text{ avec } C.I. \text{ et } C.L.$$

- ▶ et la contrainte de la dynamique du fluide

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{et C.L.}$$

- Résolution de ces equ. et de leurs équ. adjointes de nombreuses fois

- ▶ Temps CPU très élevé et grande capacité de stockage requise
- ▶ Pas applicable pour le contrôle des écoulements en temps réel

Problème de contrôle optimal associé

- Fonctionnelle à minimiser

$$J(C, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (C - \hat{C})^2 \, d\mathbf{x} \, dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (C|_T - \hat{C}|_T)^2 \, d\mathbf{x} + \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^{N_e} \alpha_n^2$$

- ▶ sous la contrainte de la dynamique du polluant

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \frac{1}{Re.Sc} \nabla^2 C \text{ avec } C.I. \text{ et } C.L.$$

- ▶ et la contrainte de la dynamique du fluide

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{et C.L.}$$

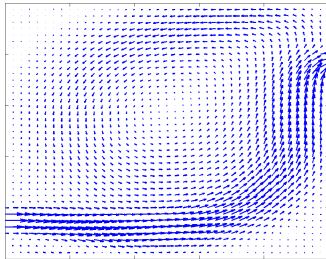
- Résolution de ces equ. et de leurs équ. adjointes de nombreuses fois
 - ▶ Temps CPU très élevé et grande capacité de stockage requise
 - ▶ Pas applicable pour le contrôle des éclts en temps réel

Décomposition du champ de vecteurs vitesse

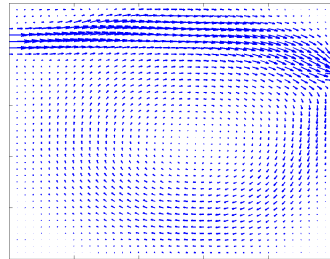
- Méthode de la fonction de contrôle pour rendre explicite la dépendance paramétrique

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \sum_{n=1}^2 \alpha_n \gamma(t) \mathbf{u}_n^s(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{u}_1^s(\mathbf{x})$ (resp. et $\mathbf{u}_2^s(\mathbf{x})$) est le champ stationnaire tel que $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ (resp. $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1)$)



$\mathbf{u}_1^s(\mathbf{x})$



$\mathbf{u}_2^s(\mathbf{x})$

POD de la vitesse et de la concentration

- Utilisation d'une décomposition POD pour $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})$$

- 15 premiers modes : 99,9% de l'énergie est capturée
- Orthogonaux, nuls aux frontières, à divergence nulle

- Utilisation d'une décomposition POD pour $C(\mathbf{x}, t)$

$$C(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_c} b_i(t) \Psi_i(\mathbf{x})$$

- 15 premiers modes : 99,9% de l'énergie est capturée
- Les modes Φ_i et Ψ_i sont obtenus à partir de 2 solutions en régime transitoire (400 snapshots pour $0 \leq t \leq 10$)

POD de la vitesse et de la concentration

- Utilisation d'une décomposition POD pour $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})$$

- 15 premiers modes : 99,9% de l'énergie est capturée
- Orthogonaux, nuls aux frontières, à divergence nulle

- Utilisation d'une décomposition POD pour $C(\mathbf{x}, t)$

$$C(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_c} b_i(t) \Psi_i(\mathbf{x})$$

- 15 premiers modes : 99,9% de l'énergie est capturée
- Les modes Φ_i et Ψ_i sont obtenus à partir de 2 solutions en régime transitoire (400 snapshots pour $0 \leq t \leq 10$)

POD de la vitesse et de la concentration

- Utilisation d'une décomposition POD pour $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})$$

- 15 premiers modes : 99,9% de l'énergie est capturée
- Orthogonaux, nuls aux frontières, à divergence nulle

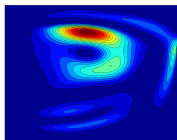
- Utilisation d'une décomposition POD pour $C(\mathbf{x}, t)$

$$C(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_c} b_i(t) \Psi_i(\mathbf{x})$$

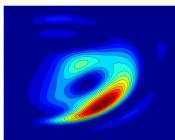
- 15 premiers modes : 99,9% de l'énergie est capturée
- Les modes Φ_i et Ψ_i sont obtenus à partir de 2 solutions en régime transitoire (400 snapshots pour $0 \leq t \leq 10$)

Illustration des modes POD

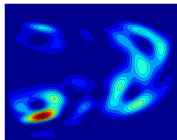
Modes de vitesses



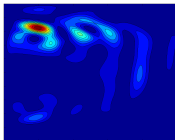
Mode 2



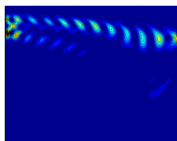
Mode 3



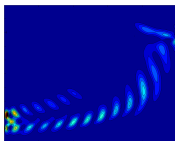
Mode 9



Mode 10

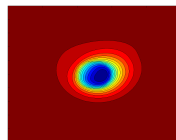


Mode 29

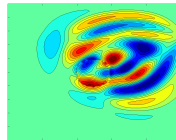


Mode 30

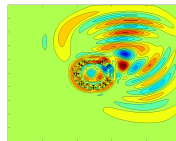
Modes de concentration



Mode 1



Mode 15



Mode 30

Obtention des modèles d'ordre réduit

- Pour la dynamique du fluide

- ▶ Injection dans les équ. de Navier Stokes de la décomposition

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \boldsymbol{\Phi}_i(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^2 \alpha_n \gamma(t) \mathbf{u}_n^s(\mathbf{x})$$

- ▶ Projection de Galerkin sur les N premiers modes $\boldsymbol{\Phi}_i$

=> ROM-vitesse noté $\mathcal{V}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, avec $\mathbf{a}(t) = \{a_1(t) \cdots a_N(t)\}^T$

- Pour la dynamique du polluant

- ▶ Injection dans l' équ. de convection diffusion de $C(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_c} b_i(t) \boldsymbol{\Psi}_i(\mathbf{x})$
- ▶ Projection de Galerkin sur les N_c premiers modes $\boldsymbol{\Psi}_i$

=> ROM-concentration noté $\mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, avec $\mathbf{b}(t) = \{b_1(t) \cdots b_{N_c}(t)\}^T$

Obtention des modèles d'ordre réduit

- Pour la dynamique du fluide

- ▶ Injection dans les équ. de Navier Stokes de la décomposition

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^2 \alpha_n \gamma(t) \mathbf{u}_n^s(\mathbf{x})$$

- ▶ Projection de Galerkin sur les N premiers modes Φ_i

=> ROM-vitesse noté $\mathcal{V}(\mathbf{a}, \alpha) = \mathbf{0}$, avec $\mathbf{a}(t) = \{a_1(t) \cdots a_N(t)\}^T$

- Pour la dynamique du polluant

- ▶ Injection dans l' équ. de convection diffusion de $C(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_c} b_i(t) \Psi_i(\mathbf{x})$
- ▶ Projection de Galerkin sur les N_c premiers modes Ψ_i

=> ROM-concentration noté $\mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$, avec $\mathbf{b}(t) = \{b_1(t) \cdots b_{N_c}(t)\}^T$

Problème d'optimisation réduit

- Le problème optimal réduit :

$$\min_{\alpha} J(\mathbf{b}, \alpha) \text{ sous les cont. } \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$$

- Introduction de la fonctionnelle de Lagrange :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \xi, \zeta) = J(\mathbf{b}, \alpha) - \sum_{j=1}^N \int_0^T \xi_j \mathcal{N}_j(\mathbf{a}, \alpha) dt - \sum_{j=1}^{N_c} \int_0^T \zeta_j \mathcal{M}_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) dt$$

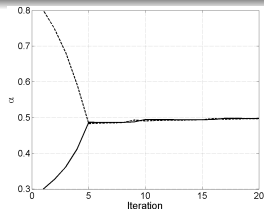
- On cherche un minimum local de \mathcal{L} , $\delta \mathcal{L} = 0$, atteint si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta_j} \delta \zeta_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}_i} \delta \mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{b}_j} \delta \mathbf{b}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_n} \delta \alpha_n = 0$$

- Résolution itérative par un algorithme de type descente

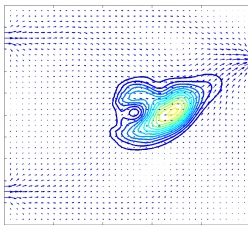
Cas traité

- Initialisation de l'algo par un champ obtenu avec $\alpha = \{0,3 \ 0,8\}^T$
- On souhaite atteindre la cible \hat{C} tel que $\alpha_c = \{0,5 \ 0,5\}^T$

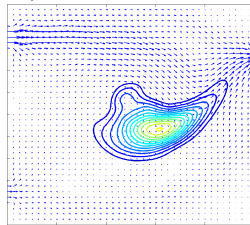


Convergence du paramètre de contrôle vers le paramètre cible

- Vitesses et concentration obtenues à $t = 2,5$



Cible



Prédiction algo de contrôle

Bilan de la méthode

- Avantages
 - ▶ Convergence de l'algo de contrôle optimal
 - ▶ Simple à mettre en oeuvre
 - ▶ Simulation en temps quasi réel
- Inconvénients
 - ▶ Manque de robustesse des ROMs lorsque les paramètres varient
 - ▶ ROMs peuvent être instables (selon modes et snapshots utilisés)
- Amélioration des modèles d'ordre réduit
 - ▶ "Projection optimale" pour améliorer la stabilité et la précision du ROM
 - ▶ Accès à l'évaluation du résidu pour enrichir la base réduite

Principe de la méthode

- Idée : obtention du ROM par minimisation du résidu
- Origine :
 - ▶ Éléments finis (*Jiang 1998 : The least-square finite element method, Springer*)
 - ▶ Réduction de problèmes linéaires paramétriques (*Bui-Thanh 2007 : Model-constrained optimization methods for reduction of parametrized large-scale systems, PhD Thesis, MIT, Cambridge*)
- Développée pour la réduction des équations non-linéaires de Navier-Stokes (*Leblond, Allery, Inard : "An optimal projection method for the reduced-order modeling of incompressible flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011.*)

Description du cas considéré

- Equations associées à la convection mixte :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + Ri \theta \mathbf{y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta &= \frac{1}{Re.Pr} \nabla^2 \theta\end{aligned}$$

- On se donne une discrétisation temporelle

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n &= -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + Ri \theta^n \mathbf{y} \\ \nabla^2 p^{n+1} &= -\nabla \cdot (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \\ \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \theta^n &= \frac{1}{Re.Pr} \nabla^2 \theta^{n+1}\end{aligned}$$

- POD sur la partie fluctuante

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \simeq \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i^n \Phi_i^u(\mathbf{x}), \quad p^n(\mathbf{x}) = \bar{p}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_p} b_i^n \Phi_i^p(\mathbf{x}), \quad \theta^n(\mathbf{x}) = \bar{\theta}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_\theta} c_i^n \Phi_i^\theta(\mathbf{x})$$

Description du cas considéré

- Equations associées à la convection mixte :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + Ri \theta \mathbf{y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta &= \frac{1}{Re.Pr} \nabla^2 \theta\end{aligned}$$

- On se donne une discrétisation temporelle

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n &= -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + Ri \theta^n \mathbf{y} \\ \nabla^2 p^{n+1} &= -\nabla \cdot (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \\ \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \theta^n &= \frac{1}{Re.Pr} \nabla^2 \theta^{n+1}\end{aligned}$$

- POD sur la partie fluctuante

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \simeq \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i^n \Phi_i^u(\mathbf{x}), \quad p^n(\mathbf{x}) = \bar{p}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_p} b_i^n \Phi_i^p(\mathbf{x}), \quad \theta^n(\mathbf{x}) = \bar{\theta}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_\theta} c_i^n \Phi_i^\theta(\mathbf{x})$$

Description du cas considéré

- Equations associées à la convection mixte :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + Ri \theta \mathbf{y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta &= \frac{1}{Re.Pr} \nabla^2 \theta\end{aligned}$$

- On se donne une discrétisation temporelle

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n &= -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + Ri \theta^n \mathbf{y} \\ \nabla^2 p^{n+1} &= -\nabla \cdot (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \\ \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \theta^n &= \frac{1}{Re.Pr} \nabla^2 \theta^{n+1}\end{aligned}$$

- POD sur la partie fluctuante

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \simeq \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i^n \Phi_i^u(\mathbf{x}), \quad p^n(\mathbf{x}) = \bar{p}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_p} b_i^n \Phi_i^p(\mathbf{x}), \quad \theta^n(\mathbf{x}) = \bar{\theta}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_\theta} c_i^n \Phi_i^\theta(\mathbf{x})$$

Obtention du modèle réduit optimal

- Introduction de cette décomposition dans les équ. discrétisées :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_j^{n+1} \left[I - \frac{\delta t}{Re} \nabla^2 \right] \Phi_j^u + \delta t \sum_{j=1}^{N_p} b_j^{n+1} \nabla \Phi_j^p &= \tilde{f}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\theta}) + \mathbf{R}_u^{n+1} \\ \sum_{j=1}^{N_p} b_j^{n+1} \nabla^2 \Phi_j^p &= \tilde{g}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) + R_p^{n+1} \\ \sum_{j=1}^{N_\theta} c_j^{n+1} \left[I - \frac{\delta t}{RePr} \nabla^2 \right] \Phi_j^\theta &= \tilde{h}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) + R_\theta^{n+1} \end{aligned}$$

- Le modèle réduit optimal consiste à chercher les coefficients temporels $\alpha^{n+1} = \{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+1}, \mathbf{c}^{n+1}\}^T$ qui minimisent la norme du résidu $\mathbf{R}^{n+1} = \{\mathbf{R}_u^{n+1}, R_p^{n+1}, R_\theta^{n+1}\}^T$.

=> On cherche les $\alpha^{n+1} = \{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+1}, \mathbf{c}^{n+1}\}^T$ qui minimis. la fonctionnelle :

$$\mathcal{L}(\alpha_i^{n+1}) = \|\mathbf{R}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{R}^{n+1} \cdot \mathbf{R}^{n+1} d\Omega$$

Obtention du modèle réduit optimal

- Introduction de cette décomposition dans les équ. discrétisées :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_j^{n+1} \left[I - \frac{\delta t}{Re} \nabla^2 \right] \Phi_j^u + \delta t \sum_{j=1}^{N_p} b_j^{n+1} \nabla \Phi_j^p &= \tilde{f}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\theta}) + \mathbf{R}_u^{n+1} \\ \sum_{j=1}^{N_p} b_j^{n+1} \nabla^2 \Phi_j^p &= \tilde{g}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) + R_p^{n+1} \\ \sum_{j=1}^{N_\theta} c_j^{n+1} \left[I - \frac{\delta t}{RePr} \nabla^2 \right] \Phi_j^\theta &= \tilde{h}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) + R_\theta^{n+1} \end{aligned}$$

- Le modèle réduit optimal consiste à chercher les coefficients temporels $\alpha^{n+1} = \{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+1}, \mathbf{c}^{n+1}\}^T$ qui minimisent la norme du résidu $\mathbf{R}^{n+1} = \{\mathbf{R}_u^{n+1}, R_p^{n+1}, R_\theta^{n+1}\}^T$.

=> On cherche les $\alpha^{n+1} = \{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+1}, \mathbf{c}^{n+1}\}^T$ qui minimis. la fonctionnelle :

$$\mathcal{L}(\alpha_i^{n+1}) = \|\mathbf{R}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{R}^{n+1} \cdot \mathbf{R}^{n+1} d\Omega$$

Obtention du modèle réduit optimal

- Après un calcul explicite, le modèle réduit optimal s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\left[I - \frac{\delta t}{Re} \nabla^2 \right] \Phi_i^u, \mathbf{R}_u^{n+1} \right) & = 0, \quad i = 1, \dots, N \\ \delta t \left(\nabla \Phi_i^p, \mathbf{R}_u^{n+1} \right) + \left(\nabla^2 \Phi_i^p, \mathbf{R}_p^{n+1} \right) & = 0, \quad i = 1, \dots, N_p \\ \left(\left[I - \frac{\delta t}{RePr} \nabla^2 \right] \Phi_i^\theta, \mathbf{R}_\theta^{n+1} \right) & = 0, \quad i = 1, \dots, N_\theta \end{cases}$$

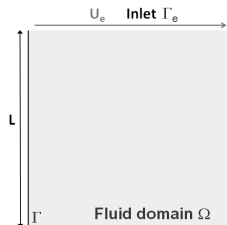
- Rq, \neq projection de Galerkin : $(\Phi_i^u, \mathbf{R}_u^{n+1}) = 0$ et $(\Phi_i^\theta, \mathbf{R}_\theta^{n+1}) = 0$
- Ecriture explicite du modèle réduit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^u & \mathbf{M}^{up} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{M}^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{n+1} \\ \mathbf{b}^{n+1} \\ \mathbf{c}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n) \\ \mathbf{G}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n) \\ \mathbf{H}(\mathbf{a}^n, \mathbf{c}^n) \end{pmatrix}$$

Cas 1 : cavité entraînée en régime périodique

• Géométrie et propriétés

- ▶ Ecoulement isotherme périodique de période ($T_p=1.61s$)
- ▶ $Re = 10000$, maillage : 250×250
- ▶ code volume fini maison



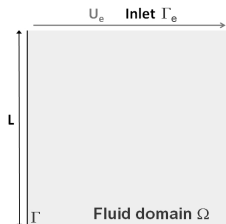
• Application de la POD

- ▶ 100 snapshots (sur 2 périodes) pour calculer les modes POD
- ▶ 6 modes pour la vitesse, 6 modes pour la pression

Cas 1 : cavité entraînée en régime périodique

• Géométrie et propriétés

- ▶ Ecoulement isotherme périodique de période ($T_p=1.61s$)
- ▶ $Re = 10000$, maillage : 250×250
- ▶ code volume fini maison

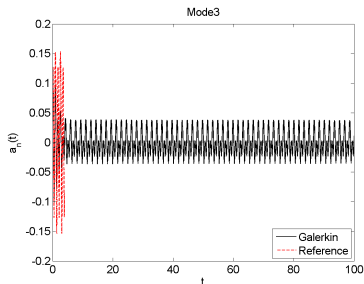
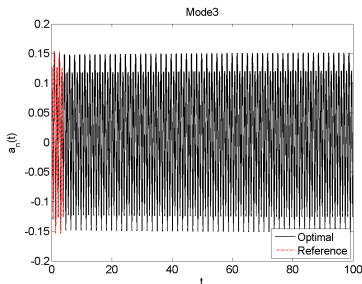


• Application de la POD

- ▶ 100 snapshots (sur 2 périodes) pour calculer les modes POD
- ▶ 6 modes pour la vitesse, 6 modes pour la pression

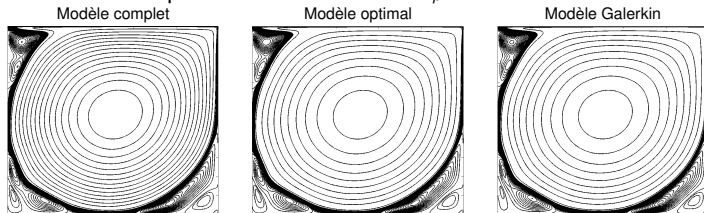
Cas 1 : cavité entraînée en régime périodique

- Evolution temporelle du mode 3 obtenu par projection optimale/Galerkin :

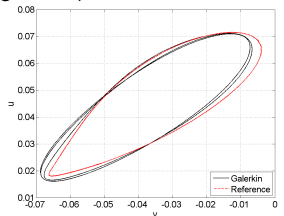
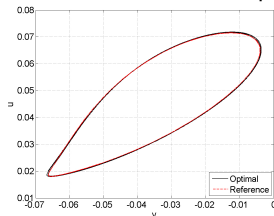


Cas 1 : cavité entraînée en régime périodique

- Comparaison des champs reconstruits à $t = 25 T_p$

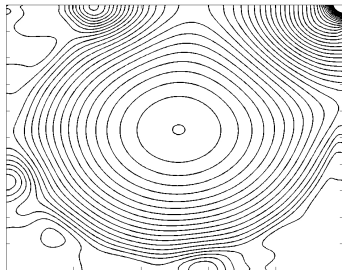


- Portrait de phase de la vitesse en 1 point (bas-gauche)

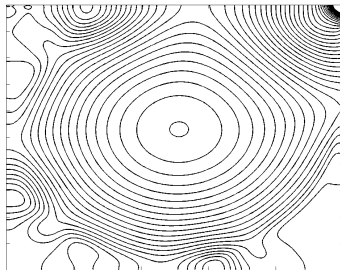


Cas 1 : cavité entraînée en régime périodique

- Isovaleur de pression à $t = 0.25 T_p$



Référence

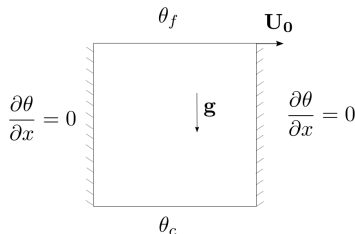


Projection optimale

Cas 2 : Cavité différent. chauffée

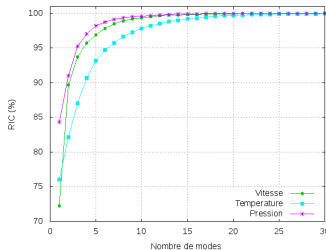
• Géométrie et propriétés

- Ecoulement anisotherme dans une cavité entraînée par le haut et différentiellement chauffée
- $Ri = 10$, $Gr = 10^6$, $Pr = 0.71$, $Re = 316$
- maillage : 100×100



• Application de la POD

- 200 snapshots issus de Saturne
- 99% energie :
 - 24 modes de vitesse
 - 20 modes de pression
 - 26 modes de température

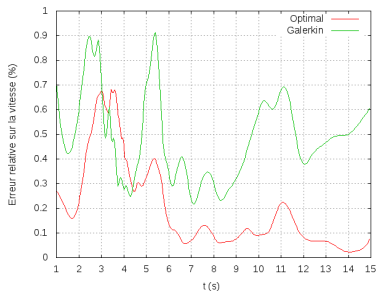


Cas 2 : Cavité différentiellement chauffée

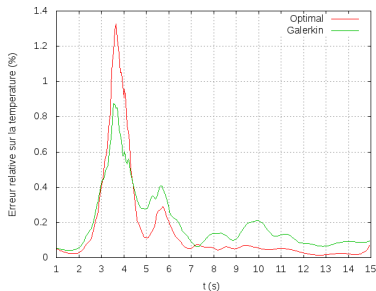
- Une fois les modes évalués, les coefs des ROM peuvent être calculés
- Les coefs temporels sont obtenus par résolution des ROM en itérant en temps (très rapide)
- Pourcentage d'erreur défini par $(100 \times \|\varphi^{ROM} - \varphi^{FM}\|_{L^2(\Omega)} / \|\varphi^{FM}\|_{L^2(\Omega)})$

Cas 2 : Cavité différentiellement chauffée

- Une fois les modes évalués, les coefs des ROM peuvent être calculés
- Les coefs temporels sont obtenus par résolution des ROM en itérant en temps (très rapide)
- Pourcentage d'erreur défini par $(100 \times \|\varphi^{ROM} - \varphi^{FM}\|_{L^2(\Omega)} / \|\varphi^{FM}\|_{L^2(\Omega)})$

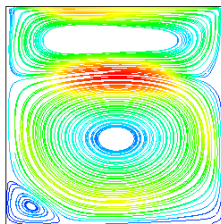


a) Vitesse

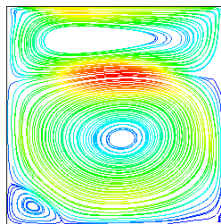


b) Température

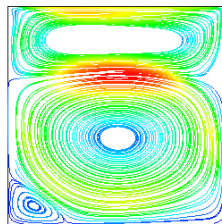
• Lignes de courant



a) Modèle complet

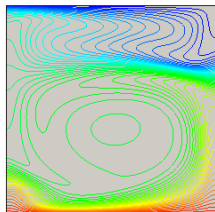


b) Projection de Galerkin

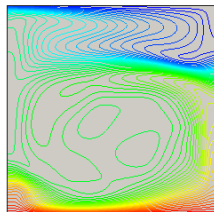


c) Projection optimale

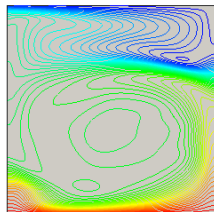
• Isocontours de température



a) Modèle complet

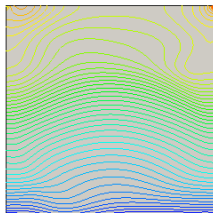


b) Projection de Galerkin

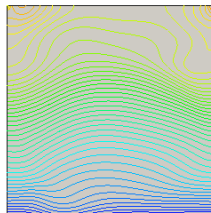


c) Projection optimale

- Isocontours de pression

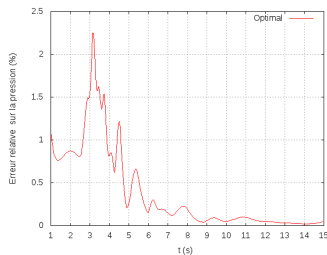


a) Modèle complet



b) Projection optimale

- Pourcentage d'erreur



Bilan de la méthode de projection optimale

- Bilan de la méthode de projection optimale
 - ▶ Gain en précision (en régimes transitoire et périodique)
 - ▶ Accès direct à l'évaluation de la pression
- Ce qu'il reste à faire en vue du contrôle
 - ▶ Formuler le problème de contrôle discret en temps
 - ▶ Enrichir la base en fonction des variations du paramètre de contrôle (par exemple par les résidus ou par méthode PGD)

Principe et historique

- La solution du problème est cherchée sous forme séparée :

$$w(x, y, t, \dots, Re) \simeq \sum_{i=1}^n F^i(x) G^i(y) H^i(t) \dots L^i(Re)$$

- ▶ méthode itérative : à chaque itération k on ajoute un nouveau produit de fonctions $F^k(x) G^k(y) H^k(t) \dots L^k(Re)$
- ▶ Otenu par la résolution d'un modèle réduit de taille $M \times N$ au lieu de résoudre un pb de taille N^M par une approche classique.

Historique

- ▶ Décomposition espace temps (Radial time-space approximation - *Ladevèze et al.*), (Generalized Spectral Decomposition - *Nouy et al.*)
- ▶ Décomposition multidimensionnelle (*Ammar, Chinesta et al.*)

Originalité : Adaptation à la mécanique des fluides

(*Dumon, Allery, Ammar, Journal of Computational Physics, vol 230(4), 2011.*)

(*Dumon, Allery, Ammar, European Journal of Computational Mechanics, vol 19, 2019*)

Principe et historique

- La solution du problème est cherchée sous forme séparée :

$$w(x, y, t, \dots, Re) \simeq \sum_{i=1}^n F^i(x) G^i(y) H^i(t) \dots L^i(Re)$$

- ▶ méthode itérative : à chaque itération k on ajoute un nouveau produit de fonctions $F^k(x) G^k(y) H^k(t) \dots L^k(Re)$
 - ▶ Otenu par la résolution d'un modèle réduit de taille $M \times N$ au lieu de résoudre un pb de taille N^M par une approche classique.
- Historique
 - ▶ Décomposition espace temps (Radial time-space approximation - *Ladevèze et al.*), (Generalized Spectral Decomposition - *Nouy et al.*)
 - ▶ Décomposition multidimensionnelle (*Ammar, Chinesta et al.*)
- Originalité : Adaptation à la mécanique des fluides

(Dumon, Allery, Ammar, *Journal of Computational Physics*, vol 230(4), 2011.)

(Dumon, Allery, Ammar, *European Journal of Computational Mechanics*, vol 19, 2009)

Principe et historique

- La solution du problème est cherchée sous forme séparée :

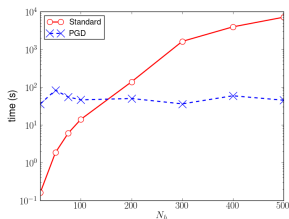
$$w(x, y, t, \dots, Re) \simeq \sum_{i=1}^n F^i(x) G^i(y) H^i(t) \dots L^i(Re)$$

- ▶ méthode itérative : à chaque itération k on ajoute un nouveau produit de fonctions $F^k(x) G^k(y) H^k(t) \dots L^k(Re)$
 - ▶ Otenu par la résolution d'un modèle réduit de taille $M \times N$ au lieu de résoudre un pb de taille N^M par une approche classique.
- Historique
 - ▶ Décomposition espace temps (Radial time-space approximation - *Ladevèze et al.*), (Generalized Spectral Decomposition - *Nouy et al.*)
 - ▶ Décomposition multidimensionnelle (*Ammar, Chinesta et al.*)
- Originalité : Adaptation à la mécanique des fluides
(*Dumon, Allery, Ammar, Journal of Computational Physics, vol 230(4), 2011.*)
(*Dumon, Allery, Ammar, European Journal of Computational Mechanics, vol(19), 2010.*)

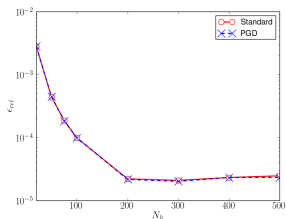
- On cherche $w(\mathbf{x}, t)$ telle que $\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \Delta w = f$ + C.I. + C.L.
- La solution du problème est recherchée sous la forme :

$$w(x, y, t) \simeq w_n(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \alpha^i F^i(x) G^i(y) H^i(t)$$

- Résultats :



a) Temps de simulation



b) Erreur par rapport à la solution analytique

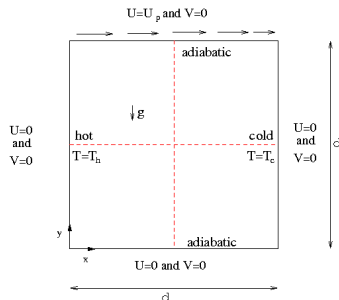
=> Précision PGD similaire à celle de la résolution standard

=> Pour $N_h = 500$ le gain en temps de calcul est d'environ 157

Problème étudié

• Géométrie étudiée

- ▶ Cavité entraînée différentiellement chauffée
- ▶ Hypothèse de Boussinesq
- ▶ $Gr = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Ri = 0.1, 1, 10$



• Méthode PGD

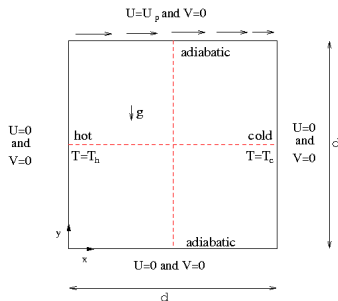
- ▶ Séparation uniquement sur les variables d'espace.
- ▶ La PGD est donc appliquée à chaque pas de temps
- ▶ Ecriture sous forme séparée de la pression, la vitesse et la température soit :

$$w(x, y) \simeq \sum_{i=1}^n \alpha_{i_w} F_w^i(x) G_w^i(y)$$

Problème étudié

• Géométrie étudiée

- ▶ Cavitité entraînée différentiellement chauffée
- ▶ Hypothèse de Boussinesq
- ▶ $Gr = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Ri = 0.1, 1, 10$



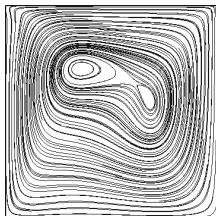
• Méthode PGD

- ▶ Séparation uniquement sur les variables d'espace.
- ▶ La PGD est donc appliquée à chaque pas de temps
- ▶ Ecriture sous forme séparée de la pression, la vitesse et la température soit :

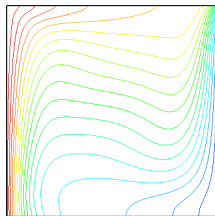
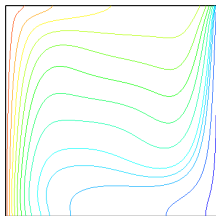
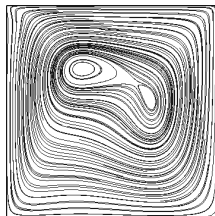
$$w(x, y) \simeq \sum_{i=1}^n \alpha_{i_w} F_w^i(x) G_w^i(y)$$

- Lignes de courant et isoligne de température ($Ri = 10$, $N_h = 100$)

a) Méthode standard

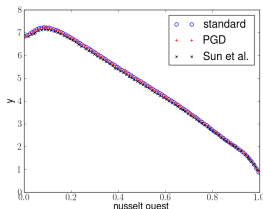


b) PGD

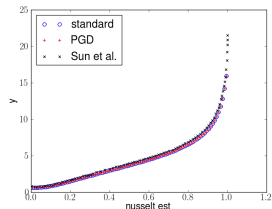


- Comparaison nombre de Nusselt aux parois ($Ri = 10$)

a) Paroi ouest



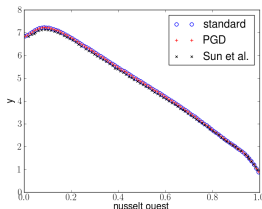
b) Paroi est



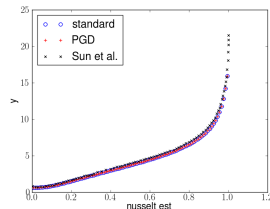
- Temps de simulation en fonction du nombre de noeuds N_h .

- Comparaison nombre de Nusselt aux parois ($Ri = 10$)

a) Paroi ouest



b) Paroi est



- Temps de simulation en fonction du nombre de noeuds N_h .

Nombre de nœuds dans chaque direction	(Temps de calcul Standard)/(Temps de calcul PGD)		
	$Ri = 10$	$Ri = 1$	$Ri = 0.1$
61	0.2	0.14	0.17
101	0.5	0.7	0.57
201	4.4	3.67	1.60
301	6.33	5.20	3.7

► Bonne précision et gain de temps pour les gros maillages

Conclusions et perspectives

- Conclusions

- ▶ Résultats quantitativement corrects
- ▶ Réduction du temps de calcul

- Perspectives

Conclusions et perspectives

Conclusions

- ▶ Résultats quantitativement corrects
- ▶ Réduction du temps de calcul

Perspectives

- ▶ Inclure le temps dans la séparation pour la simulation des écoulements
- ▶ Extension au 3D et au cas anisotherme
- ▶ Utilisation de schémas d'ordre élevé de façon à tester la capacité de la méthode pour la simulation d'écoulements pleinement turbulents
- ▶ Parallélisation de la méthode
- ▶ Adaptation de bases POD par PGD